Exercice :

On pose, pour tout n de IN*, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1°) Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2°) En déduire la limite de la suite (u_n).

3°) Pour tout $n \in$ IN*, on pose : $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN*, on a : $v_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (v_n).

b) En utilisant la double inégalité, $u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} < u_{n-1}$, montrer que la suite de terme générale $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge vers le réel 2.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\Rightarrow 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$